IOS

Fakultät für Informatik
Institut für optische Systeme
Prof. Dr. G. Umlauf

H T W G
Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Konstanz, 02.10.2020

Übung 1

Numerische Mathematik WS2020/21

Aufgabe 1 (Numerische Instabilität)

Die Berechnung der Zahl π nach dem Exhaustionsverfahren von Archimedes beruht auf dem folgenden Prinzip: Man beschreibt einem Kreis mit Radius $r = 0.5$ ein regelmäßiges n -Eck ein bzw. um und berechnete den Umfang des n-Ecks. Die nachfolgenden Schritte sein einfachgenau durchzuführen:

a) Es sei s_n der Umfang eines einbeschriebenen n-Ecks ($n \geq 3$).
Zeigen Sie: Verdoppelt man die Eckenzahl, so ergibt sich für den Umfang des dadurch entstandenen $2n$-Ecks die Rekursionsformel

$$s_{2n} = n\sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{n}\right)^2}\right)}.$$

Berechnen Sie ausgehend von $s_3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ die Werte $s_6, s_{12}, \dots, s_{3072}$.

b) Es sei S_n der Umfang eines umbeschriebenen n-Ecks ($n \geq 3$). Dann gilt analog zu a)

$$S_{2n} = \frac{2S_n}{1+\sqrt{1+\left(\frac{S_n}{n}\right)^2}}.$$

Berechnen Sie ausgehend von $S_3 = 3\sqrt{3}$ die Werte $S_6, S_{12}, \dots, S_{196608}$.

c) Eines der beiden Verfahren ist offensichtlich instabil in Bezug auf Rundungsfehler. Verbessern Sie das Verfahren mit einfachen algebraischen Mitteln zu einem rundungsfehlerstabilen Verfahren und berechnen Sie wie oben die Werte für $n = 6{,}12, \dots, 98304$.

Aufgabe 2 (Fehlerfortpflanzung)

Gegeben sind die Integrale

$$y_n = e^{-2} \int_0^1 e^{2x} x^n dx,\ n = 0,1,2,\dots$$

a) Zeigen Sie, dass die folgende Rekursionsformel gilt (Hinweis: partielle Integration)

$$y_0 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}),$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - (n+1)y_n), n = 0,1,2,\dots$$

b) Benutzen Sie diese Rekursionsformel mit dem Startwert y_0, um $y_1, y_2, \dots, y_{30}$ zu berechnen. Analysieren Sie, wie sich der absolute Fehler Δy_0 bei der Berechnung von y_n mit der Rekursionsformel fortpflanzt, und erklären Sie die auftretenden Phänomene.

c) Die Folge $\{y_n\}$ bildet eine Nullfolge (warum?). Starten Sie mit der Näherung $y_{k+1} = 0$ für verschiedene Werte von k und berechnen Sie jeweils rückwärts $y_k, y_{k-1}, \dots, y_0$. Wie erklären Sie sich die guten Näherungswerte für y_0.

Hinweis: Sie können annehmen, dass sich die Zahlen $1, 2, \dots, n+1$ korrekt am Rechner darstellen lassen und dass bei der Ausführung der arithmetischen Grundoperationen keine Fehler auftreten. Einfache Rechengenauigkeit genügt.