**Fakultät für Informatik**
Institut für optische Systeme
Prof. Dr. G. Umlauf

Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Konstanz, 20.11.2023

# Übung 2

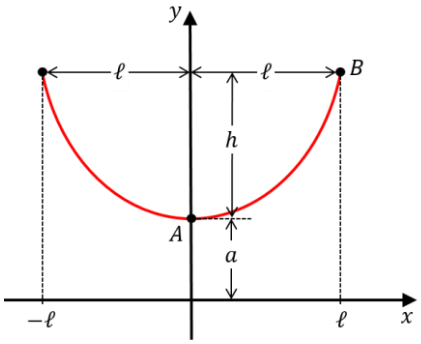
## *Numerische Mathematik*

### Aufgabe 3 (Newton-Verfahren)

Die Form eines biegsamen, nicht dehnbaren Seiles, das zwischen zwei gleich hohen Masten aufgehängt ist, wird durch die Gleichung der Kettenlinie

$$y = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

beschrieben. Es sei der Durchhang $h > 0$ sowie die Spannweite $2\ell$ ($\ell > 0$) des Seiles gegeben. Dann gilt




$$a\cosh\left(\frac{\ell}{a}\right) = a + h. \qquad (1)$$

Es werde nun $h = 1m$ und $\ell = 10m$ gewählt. Gesucht ist $a$ in Abhängigkeit von $h$ und $\ell$. Überführen Sie dazu für die gegebenen Werte die Gleichung (1) mit Hilfe einer geeigneten Substitution in die Gleichung

$$\cosh(z) = 1 + 0.1 \cdot z. \qquad (2)$$

Zeigen Sie mit Hilfe einer Skizze, dass Gleichung (2) für $z > 0$ genau eine Lösung $z^*$ besitzt, und berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren, ausgehend vom Startwert $z_0 = 0.2$, eine Näherung $z_n$ für $z^*$, für die die Schranke $|z_n - z^*| < 10^{-10}$ sichergestellt ist. Bestimmen Sie dann mit Hilfe von $z_n$ einen Näherungswert für $a$.

**Hinweis:** Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes für das Newton-Verfahren auf dem Intervall $[0.15,1]$ erfüllt sind.

## Aufgabe 4 (Newton-Verfahren)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2}\right),$$
$$g(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{67}{24}x^2 - \frac{50}{27}x + \frac{257}{162}.$$

a) Skizzieren Sie den Verlauf der Kurven von $f$ und $g$. Wie viele Schnittpunkte der beiden Kurven sind im Intervall $[0,2]$ zu erwarten?

b) Bestimmen Sie näherungsweise die Abszisse eines Schnittpunktes mit dem Newton Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 1$. Was fällt hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit auf? (Grund?)