Numerische Mathematik

§1 Rundungsfehler

Prof. Dr. Georg Umlauf

H T W G
Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Rundungsfehler

Beispiel: $x = 5/9$ in double-precision-Darstellung:

$$\mathrm{rd}(x) = x(1+\tau_x) = 0.\underbrace{5\ldots5}_{15}abcd\ldots$$

Die erste unsichere Stelle tritt bei a auf:

$$|\mathrm{rd}(x) - x| = |a.bcd\ldots - 5.555\ldots| \cdot 10^{-16} = x \cdot |\tau_x|$$

Dabei ist

$$\left.\begin{array}{c} |\tau_x| \le \mathrm{eps} \approx 1.1 \cdot 10^{-16} \\ x \approx 0.56 \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot |\tau_x| \le 0.7 \cdot 10^{-16}$$

- $\underbrace{5.555\ldots - 0.7}_{4.85\ldots} \le a.bcd\ldots \le \underbrace{5.555\ldots + 0.7}_{6.25\ldots}$
- Die16te Ziffer muss einen der Werte 4,5,6 annehmen.

Rundungsfehler

Beispiel: $E = 10,\ N = 16$

$$10^{20} + 17 - 10 + 130 \boxed{- 10^{20}} = 0$$

$$10^{20} + 17 \boxed{- 10^{20}} - 10 + 130 = 120$$

$$10^{20} \boxed{- 10^{20}} + 17 - 10 \boxed{+ 130} = 137$$

$$10^{20} + 17 \boxed{+ 130} \boxed{- 10^{20}} - 10 = -10$$

Rundungsfehler

Beispiel:

$$\begin{array}{rl} x & 0{,}98765444??? \\ -y & -\,0{,}98765333??? \\ \hline & 0{,}00000111??? \;=\; 0{,}111??? \cdot 10^{-5} \end{array}$$

Darstellungsfehler

- x und y sind auf 8 Dezimalstellen genau.
- $x - y$ ist nur auf 3 Dezimalstellen genau.
- **Auslöschung!**

Rundungsfehler

Beispiele: Fehlerfortpflanzung

- $z = \ln x \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z \approx \frac{\varepsilon_x}{\ln x}$
- $z = \sin x \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z \approx \varepsilon_x \cdot x \cdot \cot x$
- $z = \cos x \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z \approx -\varepsilon_x \cdot x \cdot \tan x$

Kritisch in der Nähe einer Nullstelle im Nenner, da hier Verstärkung besonders groß.

- $z = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z \approx \frac{1}{2}\varepsilon_x$
- $z = \arctan x \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z \approx \frac{x \cdot \varepsilon_x}{(1+x^2)\cdot \arctan x}$
- $z = \tanh x \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z \approx \varepsilon_x \cdot x \cdot \cosh^{-2} x \cdot \coth x$

Numerisch unkritisch.

- …