Numerische Mathematik

§2 Nichtlineare Gleichungen

Prof. Dr. Georg Umlauf

H T W G
Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Kondition des Nullstellenproblems

Störung: Wie groß ist der Fehler in der Eingabe?

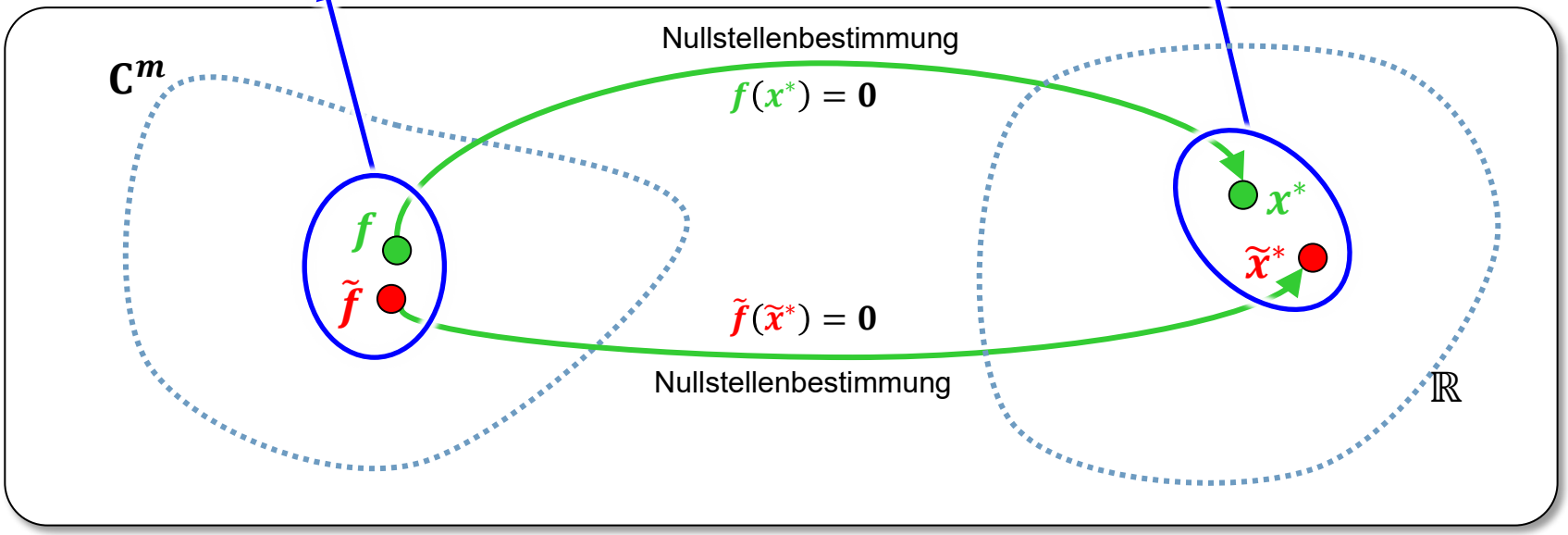
D.h. für das Nullstellenproblem

$$\left|\tilde{f}(\cdot) - f(\cdot)\right| \leq \varepsilon$$

Kondition: Wie empfindlich ist das Problem?

D.h. für das Nullstellenproblem

$$|\tilde{x}^* - x^*| \leq ?$$



Newton-Verfahren

Beispiel 1:

Kapital K wird auf m Monate verliehen mit monatlichen Rate r.

- Wie hoch ist der Zinssatz p?
- Verwende $x = 1 + \frac{p}{12 \cdot 100} = 1 + \frac{p}{1.200}$.
- $0 = \underbrace{\Big(\Big(\big((Kx - r)x - r\big)x - r\Big) \ldots \Big)}_{m \text{ mal}} x - r$

$$\Leftrightarrow\ 0 = \Big(\Big(\big(Kx^2 - rx - r\big)x - r\Big) \ldots \Big)x - r$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = \Big(\Big(\big(Kx^3 - rx^2 - rx - r\big)x - r\Big) \ldots \Big)x - r$$

Newton-Verfahren

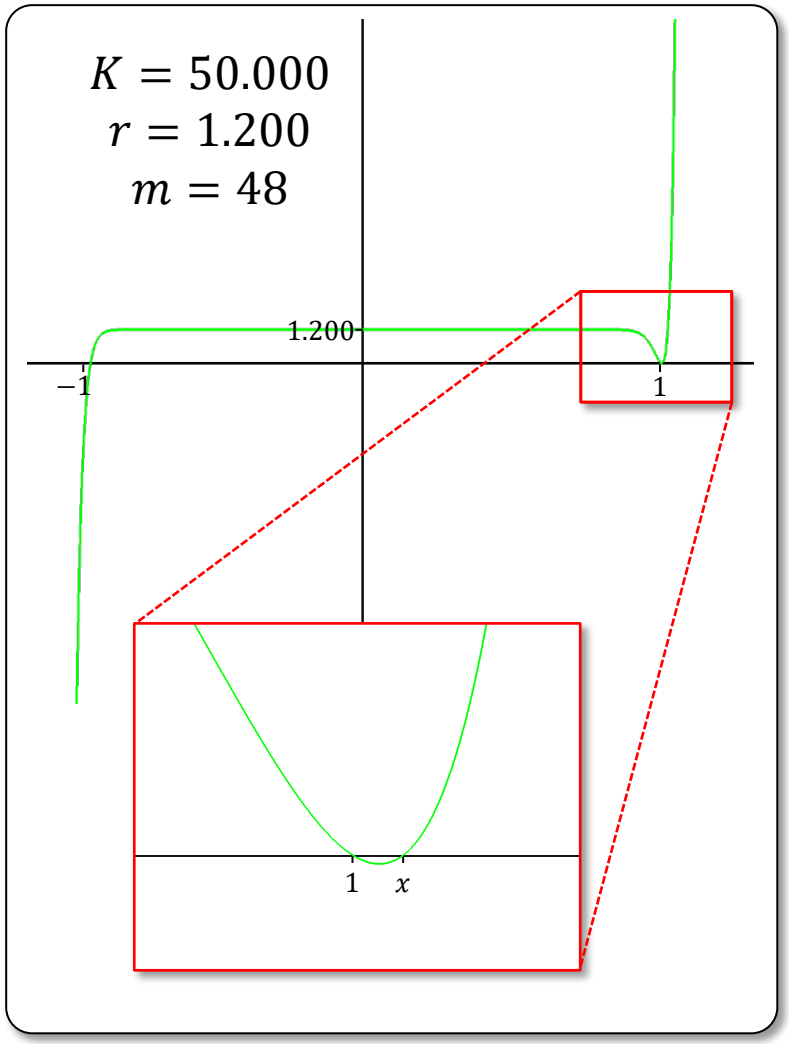
Beispiel 1 (cont.):

$$\Leftrightarrow \quad 0 = Kx^m - r\sum_{i=0}^{m-1} x^i$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = Kx^m - r\frac{x^m - 1}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = Kx^m(x-1) - r(x^m - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{0 = Kx^{m+1} - (r+K)x^m + r}$$



Newton-Verfahren

Beispiel 1 (cont.):

$$f(x) = Kx^{m+1} - (r+K)x^m + r$$

A) Wahl des Intervalls?

B) $x_0 = 1{,}01$

C) $x_{i+1} = x_i - \frac{Kx_i^{m+1} - (r+K)x_i^m + r}{(m+1)Kx_i^m - m(r+K)x_i^{m-1}}$

D) Abbruch …

- $p = 1.200 \cdot (x_n - 1)$

Newton-Verfahren

Beispiel 3: Gesucht ist die Lösung zu

$$e^{-x} = x, \qquad \text{d.h. } f(x) = x - e^{-x}$$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1+e^{-x_n}}$

A) Wahl des Intervalls? $a = 0, b = 1$ ➡ $f \in C^2[0,1]$.

B) B1) $f(0) = -1, f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$ ➡ f hat NST in $[0,1]$.

B2) $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0 \; \forall x \in [0,1]$ ➡ f ist ↗ in $[0,1]$.

B3) $f''(x) = -e^{-x} < 0 \;\; \forall x \in [0,1]$ ➡ f ist ⌒ in $[0,1]$.

B4) $x_1|_{x_0=0} = \frac{1}{2}, x_1|_{x_0=1} = \frac{2}{1+e} < 1$ ➡ Startwerte ok.

Newton-Verfahren

Beispiel 3 (cont):

a) Die Folge der Iterierten $x_0, x_1, x_2, \ldots$ konvergiert gegen NST für einen beliebigen Startwert aus $[0,1]$.

b) Fehlerabschätzung:

$$m = \min_{[0,1]} |1 + e^{-x}| = 1 + \frac{1}{e} = \frac{e+1}{e}$$

$$M = \max_{[0,1]} |-e^{-x}| = 1$$

$$\Rightarrow |x^* - x_n| \leq \frac{e}{2(e+1)} |x_n - x_{n-1}|^2$$

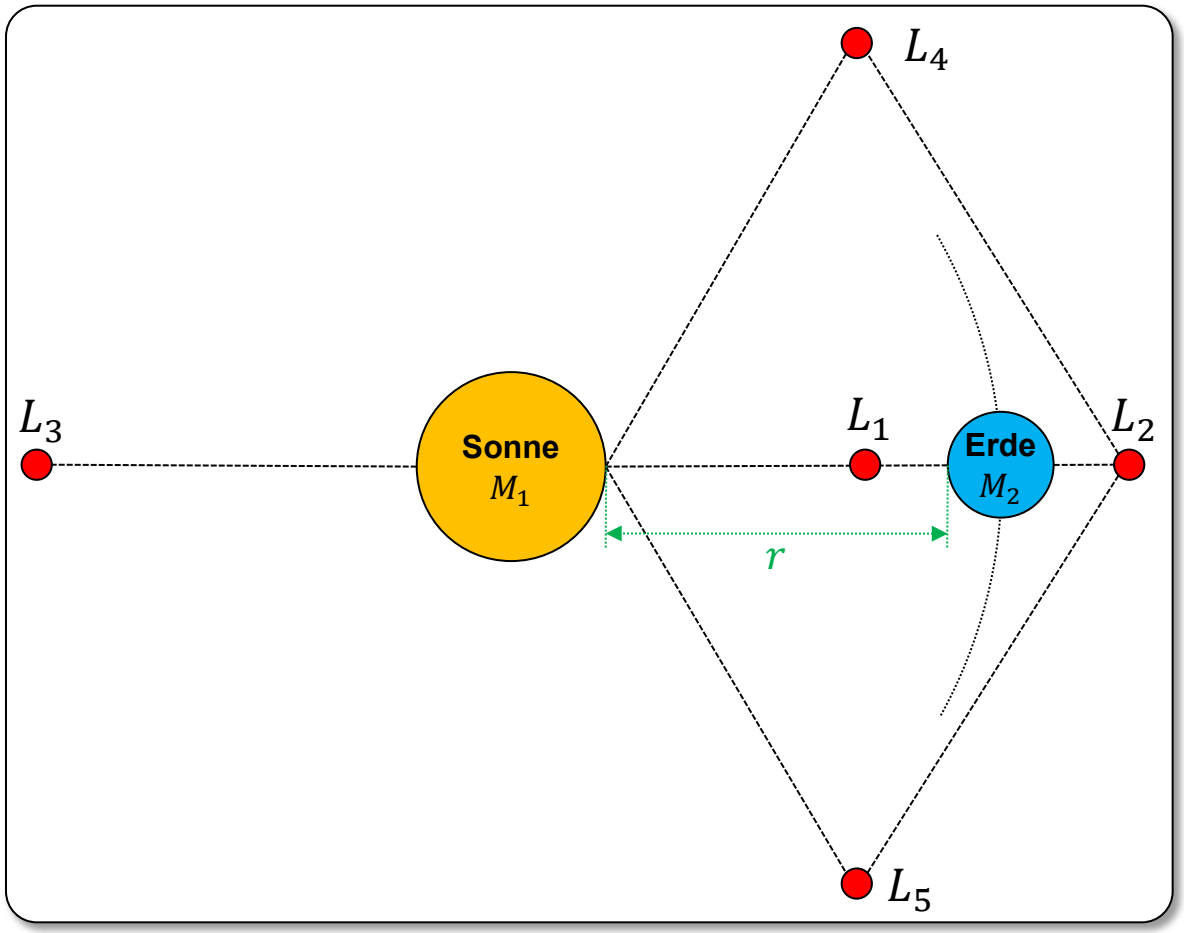
Newton-Verfahren

Beispiel Lagrange-Punkte: Punkte in der Nachbarschaft zweier umeinander rotierender Massen, in denen sich die Gravitations- und Zentrifugalkräfte aufheben.

- Keine Masse an $L_1, .., L_5$.
- Mittlerer Abstand Sonne-Erde

  $r = 1AU \approx 1{,}5 \cdot 10^8 \text{km}$
- Massenverhältnis

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \approx 3 \cdot 10^{-6}$$



Newton-Verfahren

Beispiel Lagrange-Punkte (cont.): …

$\boldsymbol{L_1, L_2, L_3}$: Vereinfachungen $y = 0, x = r(u + 1 - \alpha)$, d.h. das Problem ist 1-dimensional mit der einzigen Unbekannte u.

- $\boldsymbol{L_1}$: $a_{\text{Sonne}} = a_{\text{Erde}} + a_{\text{zentrifugal}}$ …
  - $u^2(3u + 3u^2 + u^3) = \alpha(-1 - 2u - u^2 + 2u^3 + u^4)$
  - $x \approx r(1 - \sqrt[3]{\alpha/3})$, d.h. ca. 1,5 Mio km von der Erde entfernt
- $\boldsymbol{L_2}$: $a_{\text{Sonne}} + a_{\text{Erde}} = a_{\text{zentrifugal}}$ …
  - $u^2(3u + 3u^2 + u^3) = \alpha(+1 + 2u + u^2 + 2u^3 + u^4)$
  - $x \approx r(1 + \sqrt[3]{\alpha/3})$, d.h. ca. 1,5 Mio km von der Erde entfernt
- $\boldsymbol{L_3}$: …

Newton-Verfahren

Beispiel Lagrange-Punkte (cont.): …

$\boldsymbol{L_1, L_2, L_3}$**:** Vereinfachungen $y = 0, x = r(u + 1 - \alpha)$, d.h. das Problem ist 1-dimensional mit der einzigen Unbekannte u.

- $\boldsymbol{L_1}$**:** …
- $\boldsymbol{L_1}$**:** …
- $\boldsymbol{L_3}$**:** $a_{\text{Sonne}} + a_{\text{Erde}} = a_{\text{zentrifugal}}$ …
  - $u^2(3u + 3u^2 + u^3 - 2) = \alpha(-1 - 2u + 2u^2 + 2u^3 + u^4)$
  - $x \approx -r(1 + \frac{5}{12}\alpha)$, d.h. etwas weiter von der Sonne entfernt als die Erde.

$\boldsymbol{L_4, L_5}$**:** $y \neq 0$, d.h. das Problem ist 2-dimensional…

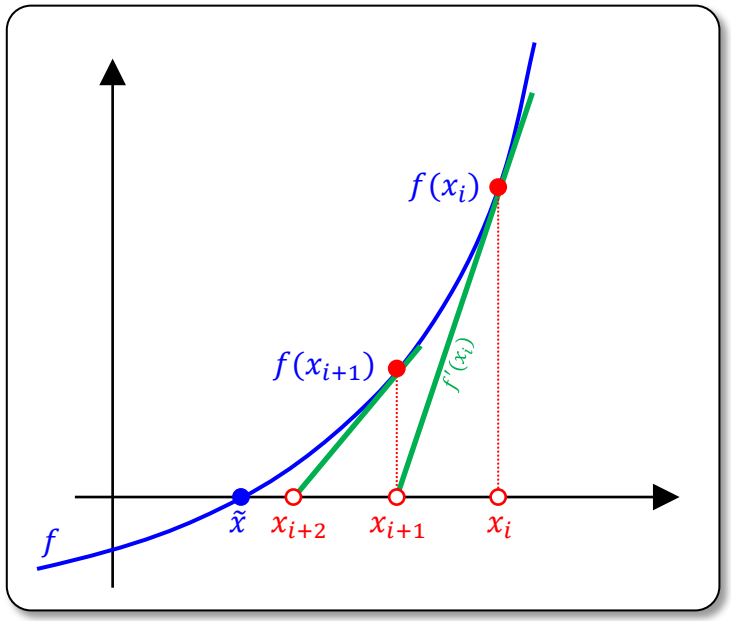
Varianten des Newton-Verfahrens

Aufgabe: Finde eine Nullstelle $\tilde{x}$ von Funktion f mit $f(\tilde{x}) = 0$.

- **Newton-Verfahren**, aka Newton-Raphson-Verfahren:
  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert x_0 und $f \in C^1$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

  - Konvergenzordnung 2, falls $f \in C^2$



Varianten des Newton-Verfahrens

- **Verbesserte Konvergenzeigenschaften**
  - gedämpftes Newton-Verfahren, aka relaxiertes Newton-Verfahren
  - mehrfache Nullstellen
- **Quasi-Newton-Verfahren** mit Approximation der Ableitung
  - Univariat: Sekanten-Verfahren, Muller-Verfahren, Sidi-Verfahren, Steffensen-Verfahren
- **Höhere Konvergenzordnung**
  - Univariat: Halley-V., Householder-V., Euler-Tschebyschew-V. (s.u.)
- **Multivariat,** d.h. System von m Gleichungen in n Variablen
  - $m = n$: Multivariates Newton-Verfahren, Euler-Tschebyschew-V.
  - $m > n$: Gauß-Newton-Verfahren
- Newton-Verfahren zur Bestimmung eines Extremums, aka **Optimierung**, d.h. Nullstelle der Ableitung einer Funktion.

Newton-Verfahren: mehrfache Nullstellen

- **Mehrfache Nullstellen (1)**
  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert x_0, $f \in C^1$ und Vielfachhheit der Nullstelle μ.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

$$x_{i+1} = x_i - \mu \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

  - Konvergenzordnung 2, falls $f \in C^2$

Newton-Verfahren: mehrfache Nullstellen

- **Mehrfache Nullstellen (2)**
  - Ansatz: Wende das Newton-Verfahren an auf $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, denn g hat nur noch einfache Nullstellen.
  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert x_0 und $f \in C^2$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)}.$$

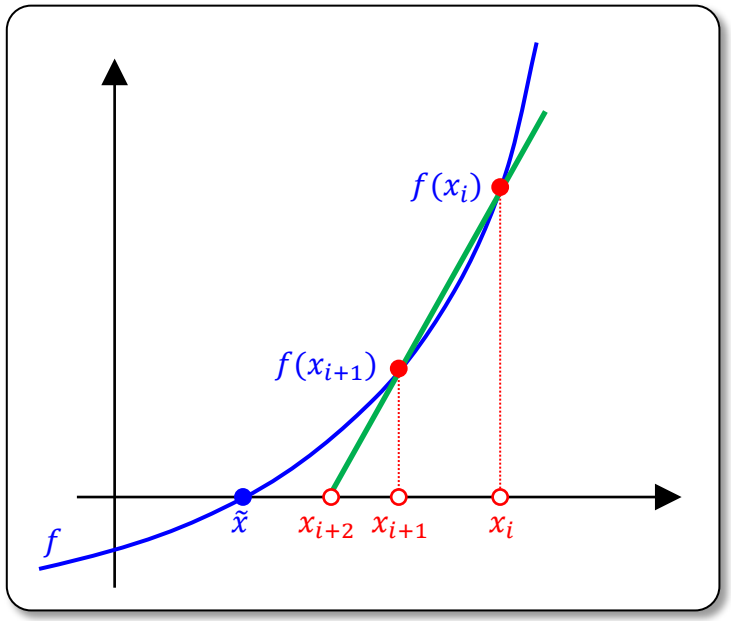
  - Konvergenzordnung 2, falls $f \in C^3$.
  - Bemerkung: Vergleiche mit dem Halley-Verfahren.

Quasi-Newton-Verfahren (univariat)

- **Sekanten-Verfahren:** Falls die Tangente nicht verfügbar ist, ersetzte sie durch die Sekante.
  - Voraussetzungen: zwei Startwerte x_0, x_1 und $f \in C^0$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

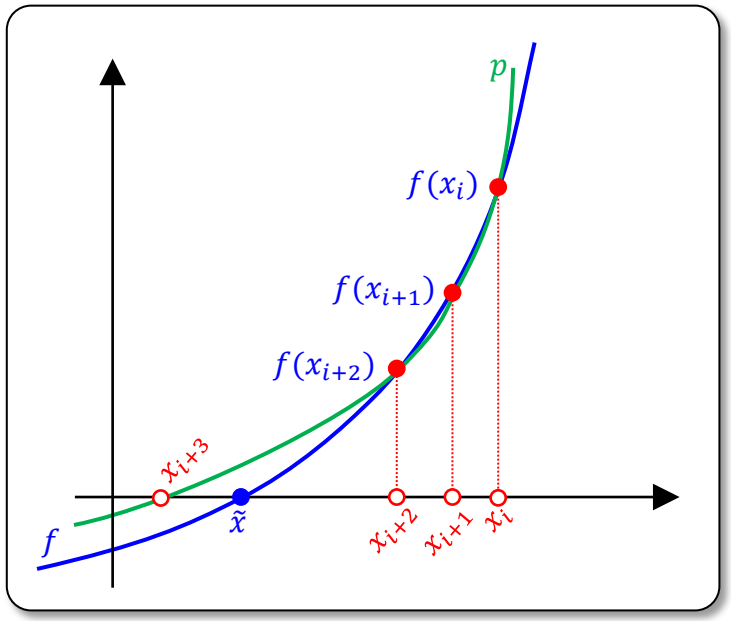
$$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} = \frac{x_i f(x_{i+1}) - x_{i+1} f(x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

  - Konvergenzordnung $\left(1 + \sqrt{5}\right)/2$



Quasi-Newton-Verfahren (univariat)

- **Muller-Verfahren:** Falls die Tangente nicht verfügbar ist, verwende den Schnittpunkt einer Parabel p, die die Funktion f an drei Punkten interpoliert, mit der x-Achse.
  - Voraussetzungen: drei Startwerte x_0, x_1, x_2 und $f \in C^0$.
  - Iterationsvorschrift für x_{i+3}, $i \geq 0$, in der Literatur…
  - Konvergenzordnung $1{,}8393$ …

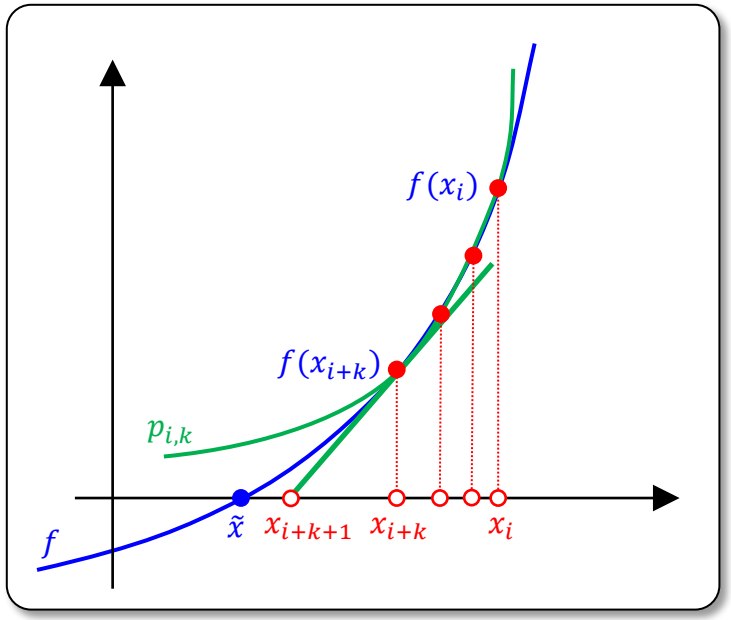


Quasi-Newton-Verfahren (univariat)

- **Sidi-Verfahren:** Falls die Tangente nicht verfügbar ist, ersetzte sie durch die Tangente eines Polynoms $p_{i,k}$ (in Newton-Form), das die Funktion f an $k+1$ Punkten interpoliert.
  - Voraussetzungen: $k+1$ Startwerte $x_0, \ldots, x_k$ und $f \in C^0$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

$$x_{i+k+1} = x_{i+k} - \frac{f(x_{i+k})}{p'_{i,k}(x_{i+k})}.$$

  - Konvergenzordnung ψ_k, für $f \in C^{k+1}$, mit $\psi_1 = \left(1+\sqrt{5}\right)/2, \psi_2 \approx 1.839\ldots$, und $\lim_{k\to\infty} \psi_k = 2$.



Quasi-Newton-Verfahren (univariat)

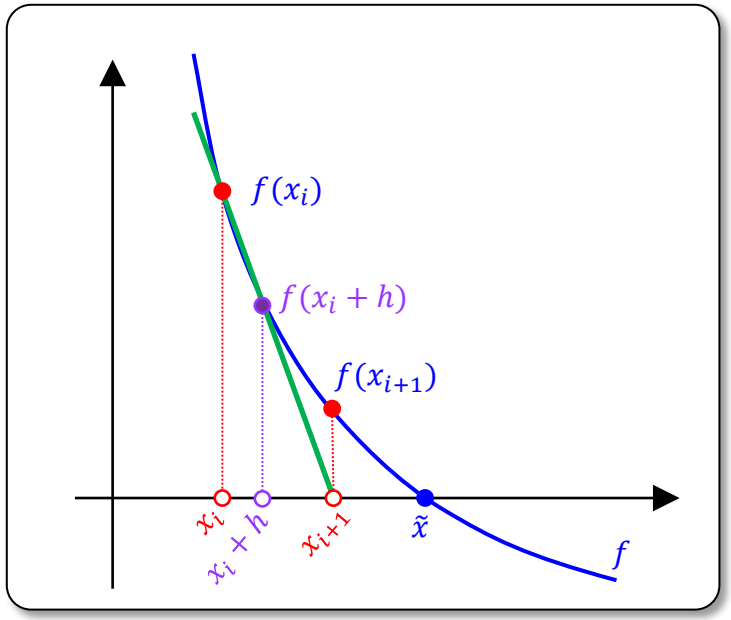
- **Steffensen-Verfahren:** Falls die Tangente nicht verfügbar ist, ersetzte sie durch Sekante in $f(x)$ und $f(x+h)$.
  - Voraussetzungen: Schrittweite h, geeigneter Startwert x_0, $f'(\tilde{x}) \in (-1,0)$ und $f \in C^0$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{g(x_i)},$$

$$g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$h = f(x_i).$$

  - Konvergenzordnung 2



Newton-Verfahren: höhere Konvergenzordnung

- **Halley-Verfahren (hyperbolisch, rational)**
  - Idee: Approximiere die Funktion f durch eine Hyperbel, die f in x von zweiter Ordnung berührt.
  - Ansatz: Wende das Newton-Verfahren an auf $\frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}}$.
  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert x_0 und $f \in C^2$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2f(x_i)f'(x_i)}{2f'(x_i)^2 - f(x_i)f''(x_i)}.$$

  - Konvergenzordnung 3, falls $f \in C^3$.

Newton-Verfahren: höhere Konvergenzordnung

- **Halley-Verfahren (parabolisch, irrational)**
  - Idee: Approximiere die Funktion f durch eine Parabel, die f in x von zweiter Ordnung berührt

    $$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2 + O(h^3).$$

  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert x_0 und $f \in C^2$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

    $$x_{i+1} = x_i - \frac{2f(x_i)}{f'(x_i)} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2f(x_i)f''(x_i)}{f'(x_i)^2}} \right)^{-1}.$$

  - Konvergenzordnung 3, falls $f \in C^3$.

Newton-Verfahren: höhere Konvergenzordnung

- **Householder-Verfahren**
  - Ansatz: Wende das Newton-Verfahren an auf

$$\left|(1/f)^{(d-1)}\right|^{-1/d}.$$

  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert x_0 und $f \in C^d$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

$$x_{i+1} = x_i + d\,\frac{(1/f)^{(d-1)}(x_i)}{(1/f)^{(d)}(x_i)}.$$

  - Konvergenzordnung $d+1$, falls $f \in C^{d+1}$.

Multivariates Newton-Verfahren

- **Multivariates Newton-Verfahren** für ein System F von n nicht-linearen Gleichungen in n Variablen
  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$, F mit regulärer Jacobi-Matrix $J_F(\cdot) := F'(\cdot)$ und Inversen $J_F^{-1}(\cdot)$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

$$x_{i+1} = x_i - J_F^{-1}(x_i) \cdot F(x_i)$$

bzw. löse das lineare Gleichungssystem

$$J_F(x_i)(x_{i+1} - x_i) = -F(x_i).$$

Multivariates Verfahren

- **Euler-Tschebyschef-Verfahren** für ein System F von n nicht-linearen Gleichungen in n Variablen
  - Ansatz: Nutze die abgebrochene Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung am Startwert x_0.
  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert x_0, $F \in C^2$, $F'(\cdot)$ Regulärer, $F''(\cdot)$ leicht berechenbar.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$
    1. Löse $F'(x_i)s_i = -F(x_i)$ (aka Newton-Schritt)
    2. Löse $F'(x_i)t_i = -\frac{1}{2}F''(x_i)(s_i, s_i)$ (aka quadratische Korrektur)
    3. Setze $x_{i+1} = x_i + s_i + t_i$
  - Konvergenzordnung 3

Multivariates Newton-Verfahren

- **Gauß-Newton-Verfahren** für System $F(x) = y$ von m nicht-linearen Gleichungen $y \in \mathbb{R}^m$ in n Variablen $x \in \mathbb{R}^n$ mit $m > n$
  - Ansatz: Löse das nicht-lineare Least-Squares-Problem mit dem Newton-Verfahren.
  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$, F mit $(m \times n)$-Jacobi-Matrix $J_F(\cdot)$ und Pseudo-Inverse $J_F^+(\cdot)$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

$$x_{i+1} = x_i + J_F^+(x_i) \cdot F(x_i).$$

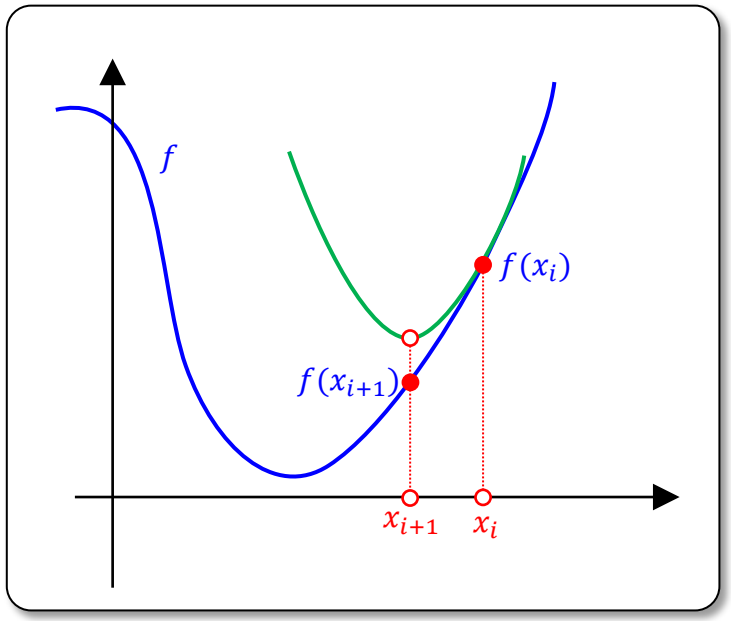
Multivariates Newton-Verfahren

- **NN-Verfahren** für System $F(x) = y$ von m nicht-linearen Gleichungen $y \in \mathbb{R}^m$ in n Variablen $x \in \mathbb{R}^n$ mit $m > n$
  - Ansatz: Löse das nicht-lineare Least-Squares-Problem mit einem Quasi-Newton-Verfahren.
  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$, F mit **tbd**
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$ **tbd**

Newton-Verfahren: univariate Optimierung

- **Optimierung,** d.h. finde ein Extremum der univariaten Funktion f.
  - Ansatz: Finde Nullstelle der Ableitung f' mit dem Newton-Verfahren, d.h. berechne Extremum der Taylor-Parabel.
  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert x_0 und $f \in C^2$.
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}.$$



Newton-Verfahren: multivariate Optimierung

- **Optimierung,** d.h. finde ein Extremum der multivariaten Funktion $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
  - Ansatz: Finde Nullstelle des Gradienten $\nabla F = \left(\partial F / \partial x_j\right)_j$ mit dem multivariaten Newton-Verfahren.
  - Voraussetzungen: geeigneter Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und F mit der symmetrischen Hesse-Matrix
    $$H_F(\cdot) = \left(\partial F / \partial x_j \partial x_k\right)_{j,k=1\ldots n}.$$
  - Iterationsvorschrift für $i \geq 0$
    $$x_{i+1} = x_i - H_F^{-1}(x_i) \cdot \nabla F(x_i)$$
    bzw. löse das lineare Gleichungssystem
    $$H_F(x_i)(x_{i+1} - x_i) = -\nabla F(x_i).$$