Numerische Mathematik

§3 Lineare Gleichungssysteme

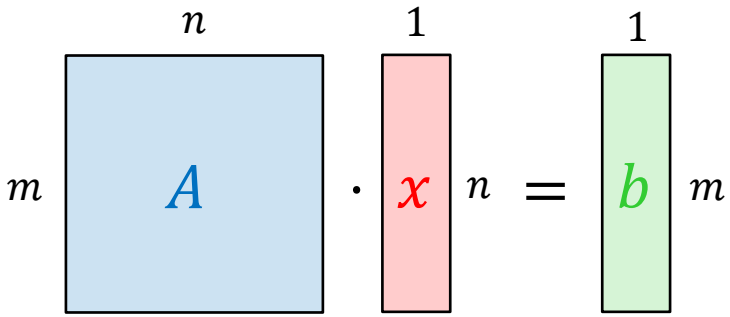
Prof. Dr. Georg Umlauf

Lineare Gleichungssysteme

Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als lineare Abbildung interpretieren:

$$A: \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ A \cdot x \mapsto b \end{cases} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$$

Schematisch:

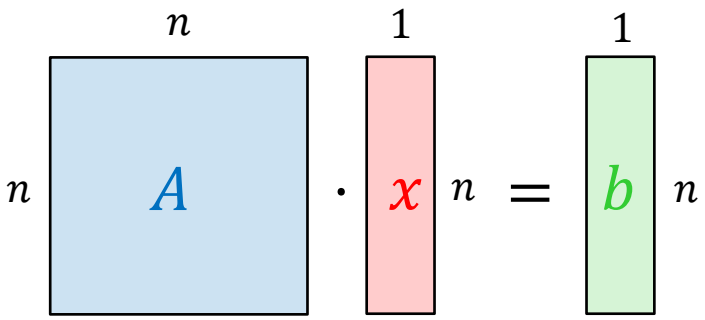


Drei Möglichkeiten:

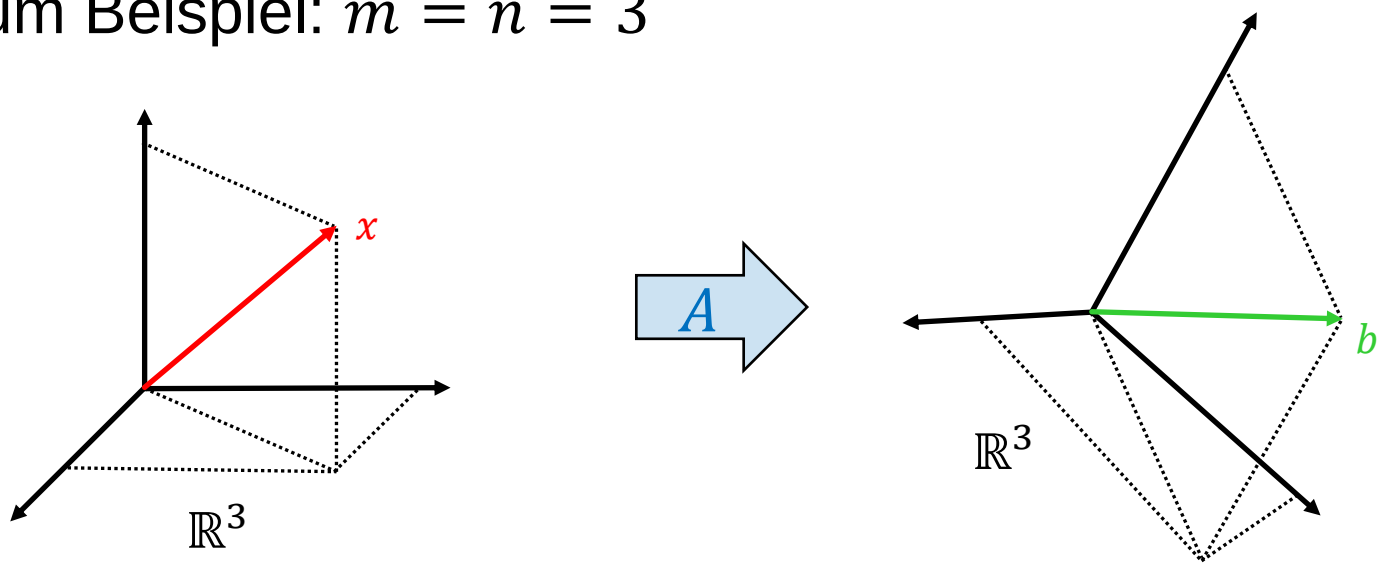
1. $m = n$, aka quadratisch
2. $m > n$, aka überbestimmt
3. $m < n$, aka unterbestimmt

Lineare Gleichungssysteme

1. $m = n$, aka quadratisch



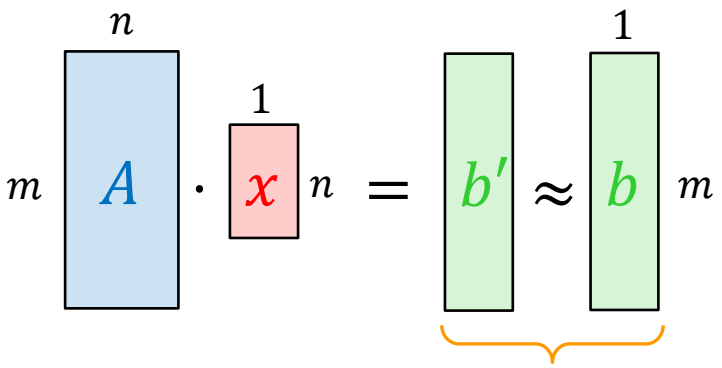
Zum Beispiel: $m = n = 3$



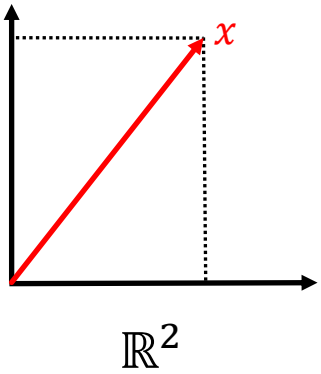
Bemerkung: Nur falls auch $r := \mathrm{rank}(A) = n$

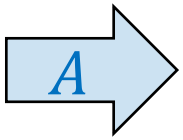
Lineare Gleichungssysteme

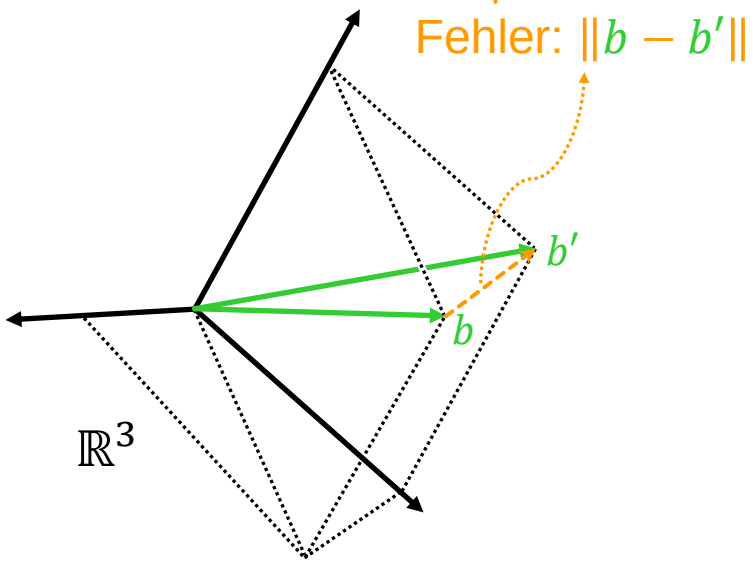
2. $m > n$, aka überbestimmt



Zum Beispiel: $m = 3,\ n = 2$







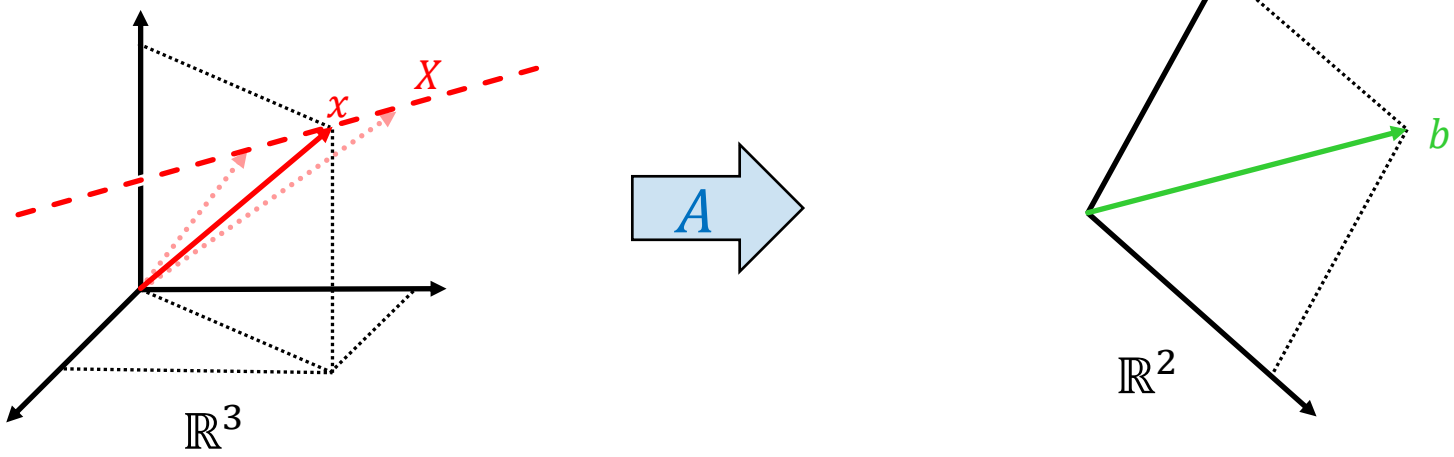
Bemerkung: Nur falls auch $r := \mathrm{rank}(A) = n = \min(m, n)$.

Lineare Gleichungssysteme

3. $m < n$, aka unterbestimmt

$$\underset{m}{\boxed{A}}\ \underset{n}{\cdot}\ \underset{n}{\boxed{x}}\ \underset{1}{} = \underset{m}{\boxed{b}}\ \underset{1}{} \qquad \text{für alle } x \in X$$

Zum Beispiel: $m = 2,\ n = 3$



Bemerkung: Nur falls auch $r := \operatorname{rank}(A) = m = \min(m, n)$.

Beispiel 1: Überbestimmtes LGS

Beispiel 1:

- Winkelmessungen in einem Dreieck:

$$\alpha = 32.3°, \qquad \beta = 67.9°, \qquad \gamma = 80.1° \qquad (1)$$

$$\alpha \qquad + \beta \qquad + \gamma = 180° \qquad (2)$$

- Die exakte Beziehung (2) wird durch die Messungen (1) kontrolliert.
- LGS ist überbestimmt und führt in der Regel zu einem Widerspruch.

Beispiel 2: Gauß-Algorithmus

Beispiel 2: $m = n = 3$

- Gegeben sei das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2\,x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

- Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel 2: Gauß-Algorithmus

- Schritt 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

- Schritt 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Beispiel 2: Gauß-Algorithmus

- Rückwärtseinsetzen

$$\begin{aligned} -2x_3 &= 4 &&\Leftrightarrow && x_3 = -2 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 0 &&\Leftrightarrow && x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 &&\Leftrightarrow && x_1 = -1 \end{aligned}$$

Beispiel 3: Wahl des Pivot-Elements

Dreiziffrige Dezimalarithmetik

- LGS

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

- Korrekte Lösung:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10^{-3} & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{2{,}000}{1{,}002} = -1{,}996007\ \ldots$$

$$y = \quad \ldots \quad = \frac{4{,}006}{1{,}002} = \quad 3{,}998003\ \ldots$$

Beispiel 3: Wahl des Pivot-Elements

- Ohne Pivotisierung:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{rd}\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & -1 & -4 \\ 0 & 2+10^{3} & 6+4\cdot 10^{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & -1 & -4 \\ 0 & 10^{3} & 4{,}01\cdot 10^{3} \end{array}\right)$$

- $y = 4{,}01$

  $x = (-4+4{,}01)\cdot 10^{3} = 0{,}01\cdot 10^{3} = 10$

- Bereits das Vorzeichen ist nicht korrekt!

Beispiel 3: Wahl des Pivot-Elements

- Mit Pivotisierung:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 10^{-3} & -1 & -4 \end{array}\right)$$

- $\mathrm{rd}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1-2\cdot 10^{-3} & -4-6\cdot 10^{-3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -4{,}01 \end{array}\right)$
- $y = 4{,}01$

  $x = 6 - 8{,}02 = -2{,}02$
- relativer Fehler in x: $\varepsilon_x \approx \frac{|-2{,}02+1{,}99|}{1{,}99} = 1{,}5\cdot 10^{-2}$

  relativer Fehler in y: $\varepsilon_y \approx \frac{4{,}01-3{,}99}{3{,}99} = 5{,}0\cdot 10^{-3}$

Beispiel 4: Schlecht konditioniertes LGS

- LGS (Hilbert-Matrix)

$$H = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & & 1/6 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1/5 & 1/6 & \cdots & 1/9 \end{pmatrix}$$

- Wähle b so, dass $x = (1,1,1,1,1)^t$, d.h. b ist die Summe der Zeileneinträge.
  - b_i ist die Summe der Matrixelemente der i-ten Zeile.
  - a) Fehler ist sofort ablesbar.

    b) Relativer und absoluter Fehler sind gleich.

    c) Matrix ist pivotisiert.

Beispiel 4: Schlecht konditioniertes LGS

- Ersetze $h_{51} = 0{,}2$ durch $h_{51} = 0{,}20001$
- Störung in der 5-ten Stelle.

- Lösung $\tilde{x}$ des nur sehr gering gestörten Problems:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0{,}9937 \\ 1{,}1252 \\ 0{,}4365 \\ 1{,}8765 \\ 0{,}5618 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5: LR-Zerlegung

Löse das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Vorwärtselimination liefert

$$Rx = c \qquad \text{mit } R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 5: LR-Zerlegung

- Ansatz:

$$L \cdot R = A \text{ mit } L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

liefert

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 5: LR-Zerlegung

Beispiel (cont. 1):

- $i = 2, k = 1$: $l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{1}{1} = -1$
- $i = 3, k = 1$: $l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$
- $i = 3, k = 2$: $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$$l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{1}{2} = -1/2$$

Beispiel 5: LR-Zerlegung

Beispiel (cont. 2):

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $Ly = b$ mit $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1/2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 6 \\ y_2 = 10 \\ y_3 = -6 \end{array}$

(2) $Rx = y$ mit $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{array}$

Beispiel 6: Nachiteration

- LGS (Hilbert-Matrix)

$$H = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{pmatrix}$$

- Wähle b so, dass $x = (1,1,1)^t$
- b_i ist die Summe der Matrixelemente der i-ten Zeile

$$b = \begin{pmatrix} 107/210 \\ 146/336 \\ 191/504 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6: Nachiteration

- In 5-ziffriger Dezimalarithmetik ist die Lösung x

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1{,}03845 \\ 0{,}89673 \\ 1{,}06667 \end{pmatrix}$$

- Berechnung von $r^{(0)} = b - A \cdot x^{(0)}$ mit 10 Stellen

$$r^{(0)} = 10^{-5} \begin{pmatrix} -0{,}24653 \\ 1{,}09407 \\ 0{,}80793 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 6: Nachiteration

- Berechnung von $\Delta x^{(0)}$ aus $r^{(0)} = A \cdot \Delta x^{(0)}$

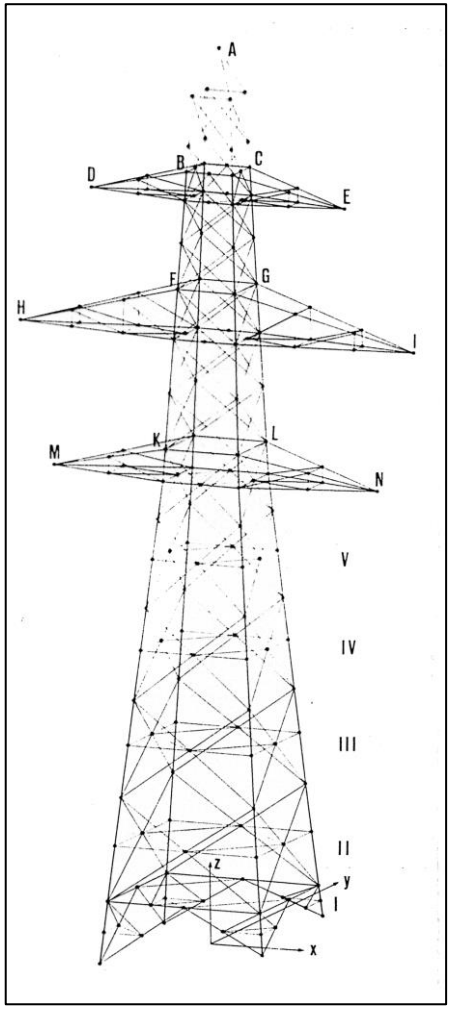
$$\Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0{,}03709 \\ 0{,}09955 \\ -0{,}06424 \end{pmatrix}$$

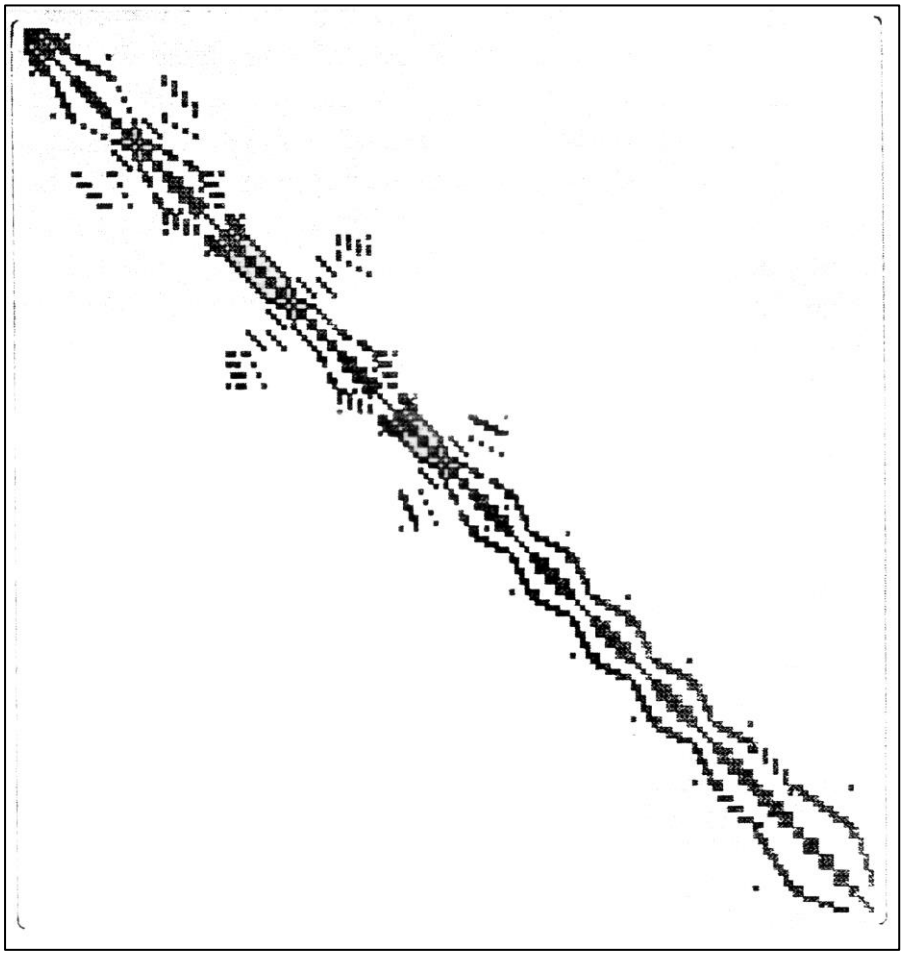
- Berechnung von $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1{,}00136 \\ 0{,}99628 \\ 1{,}00243 \end{pmatrix}, \; x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1{,}03845 \\ 0{,}89673 \\ 1{,}06667 \end{pmatrix}$$

- Wiederhole dieses Vorgehen...

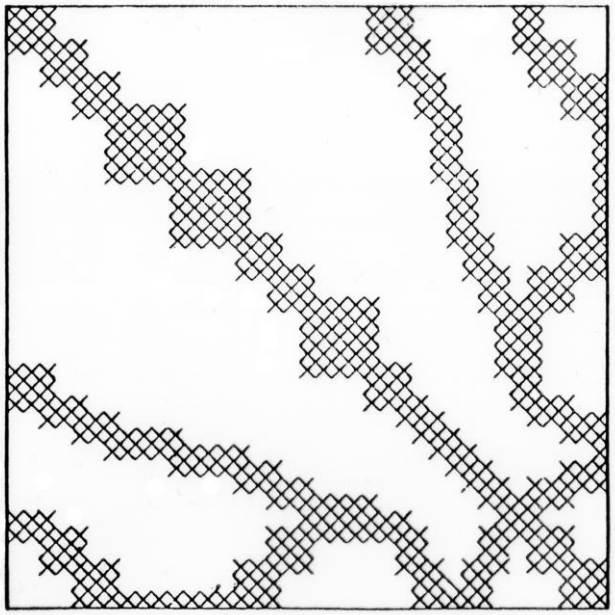
Beispiel 7: Dünnbesetzte Matrizen





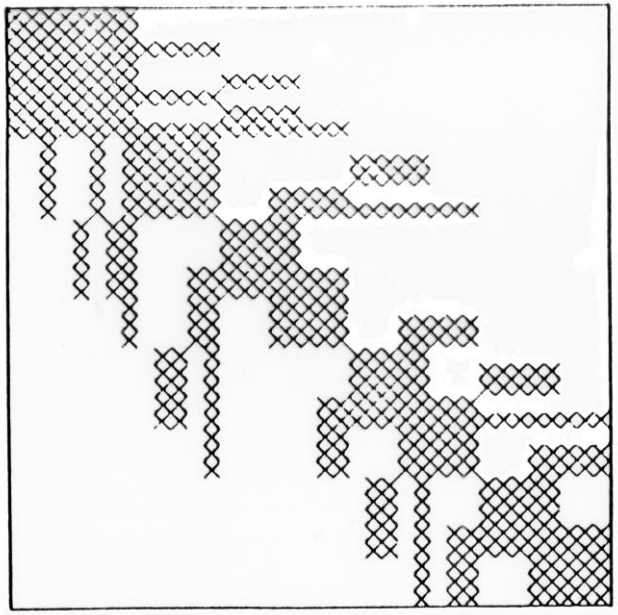
Bandstruktur der Matrix

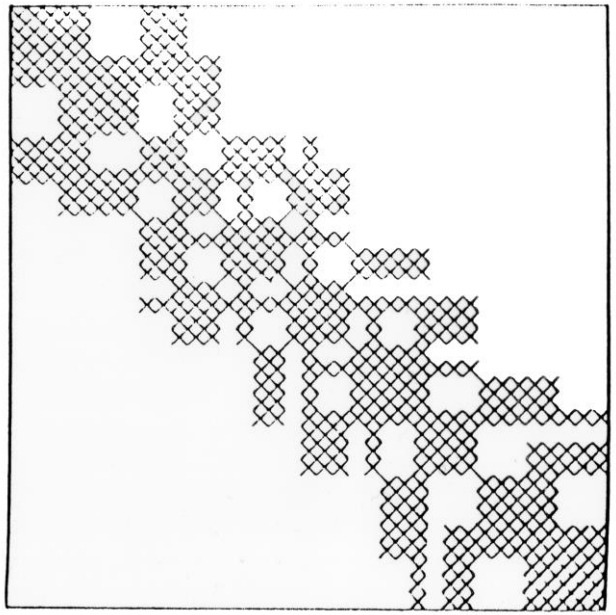
Beispiel 8: Profiloptimierung



dünnbesetzte Matrix

Zwischenergebnis





Endergebnis