Numerische Mathematik

§5 Interpolation

Prof. Dr. Georg Umlauf

H T W G
Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Beispiel: Interpolation der Γ-Funktion

Beispiel (Teil 1):

- Verallgemeinerung der Fakultät auf reelle Zahlen:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, x > -1 \text{ mit}$$

$$\Gamma(k) = k \cdot \Gamma(k-1) = k!, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

- Das Integral ist nicht geschlossen auswertbar.
- Gesucht ist Ersatzfunktion p, die global auswertbar ist, mit

$$p(k) = k!.$$

$k = x_k$	0	1	2	3	4	5	...
$k!$	1	1	2	6	24	120	...

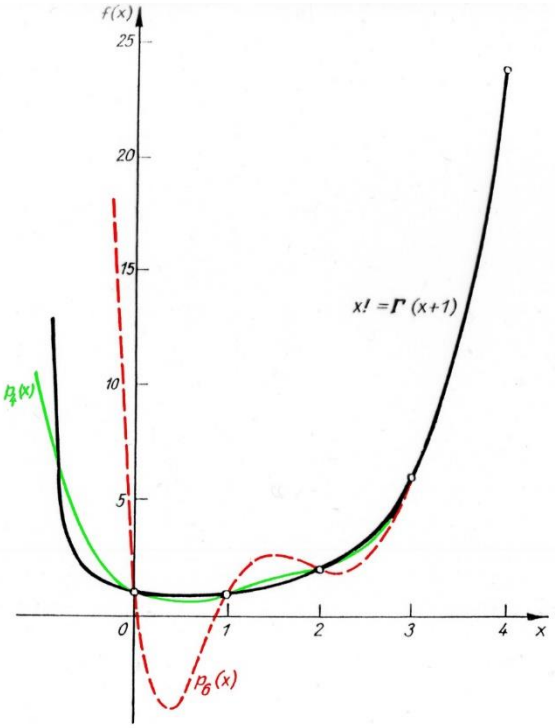
Gesucht z.B. $\Gamma(2.5) = 3.323$ ...

Beispiel: Interpolation der Γ-Funktion

Beispiel (Teil 2):

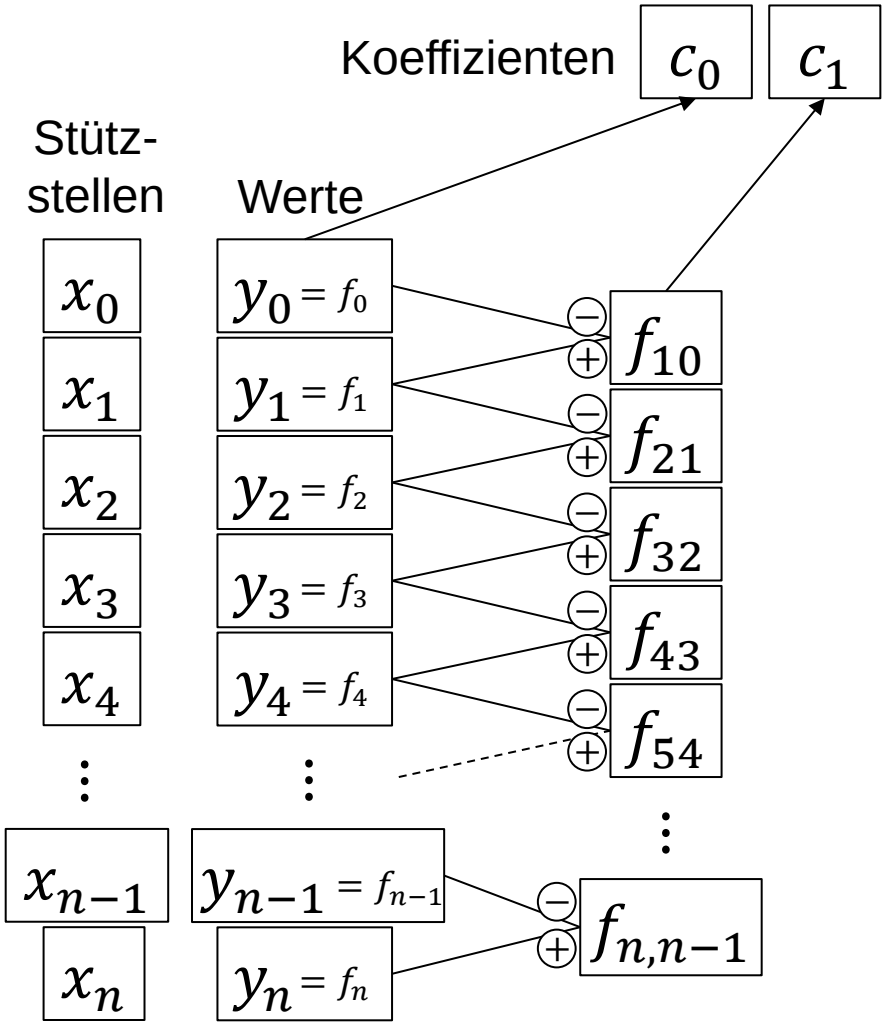
- Für $n = 4$ ergibt sich das LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$



- $p_4(x) = 1 - \frac{25}{12}x + \frac{29}{8}x^2 - \frac{23}{12}x^3 + \frac{3}{8}x^4$
- $p_6(x) \approx 1 - 37.45 \cdot x + 86.138 \cdot x^2 - 71.89583 \cdot x^3 + 27.99305 \cdot x^4 - 5.15416 \cdot x^5 + 0.36805 \cdot x^6$

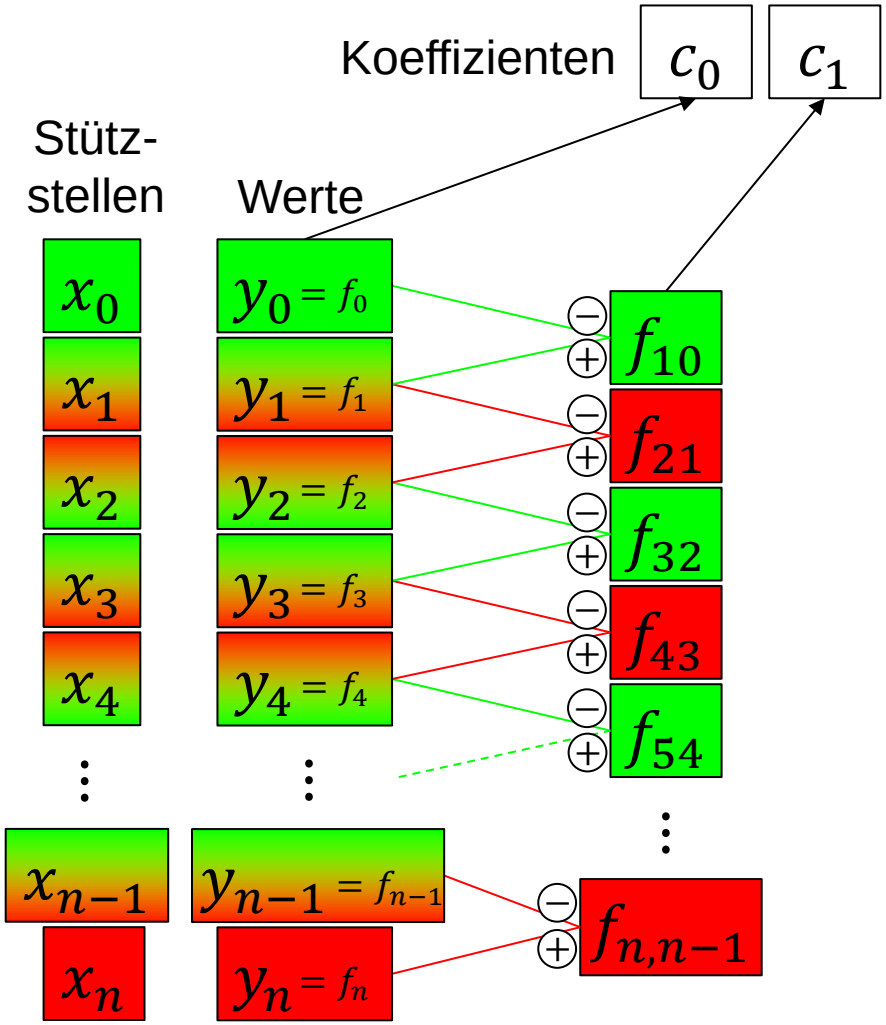
Newton-Schema (Steigungsschema)



Regel

$$f_{ij} = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}$$

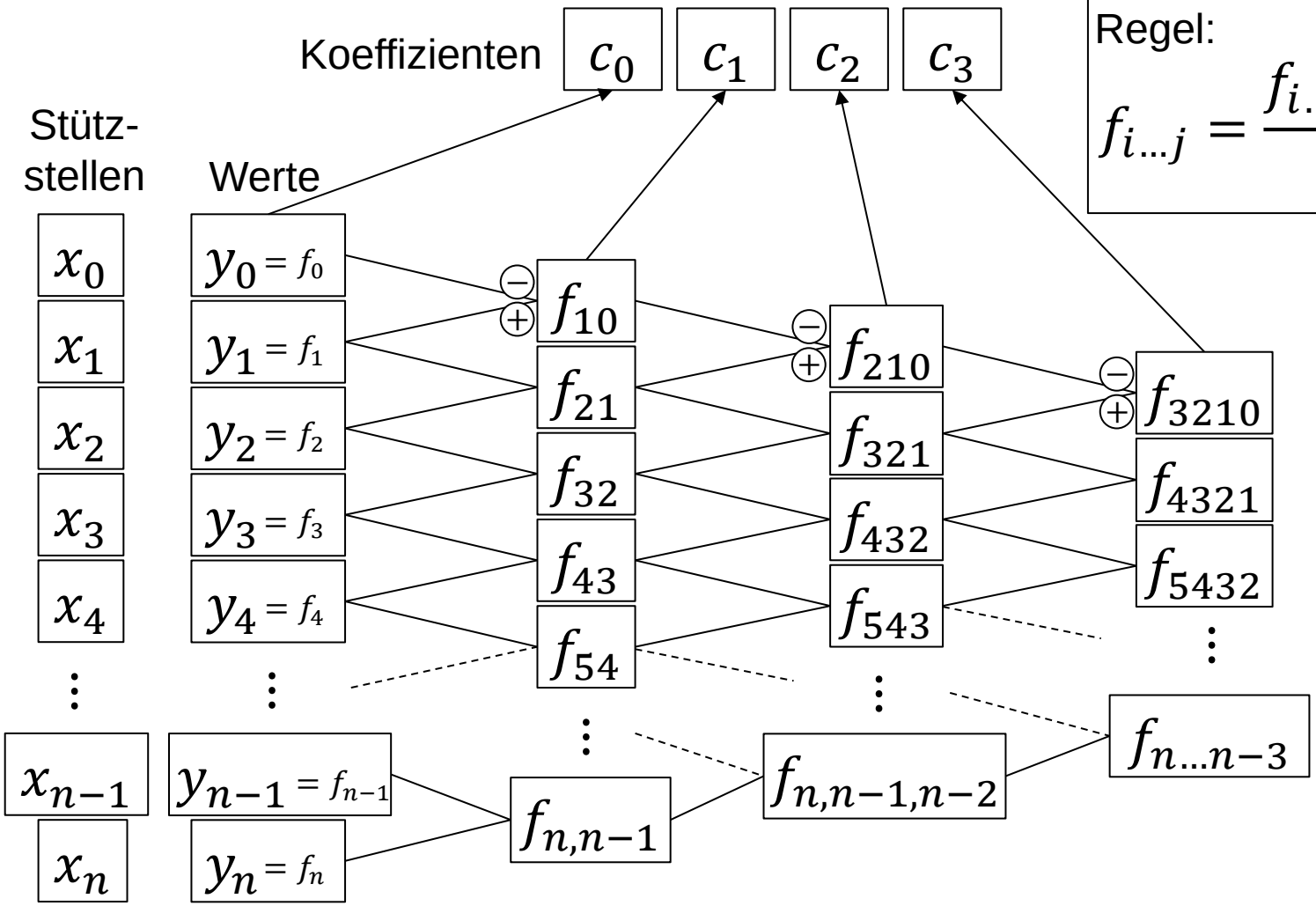
Newton-Schema (Steigungsschema)



Regel

$$f_{ij} = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}$$

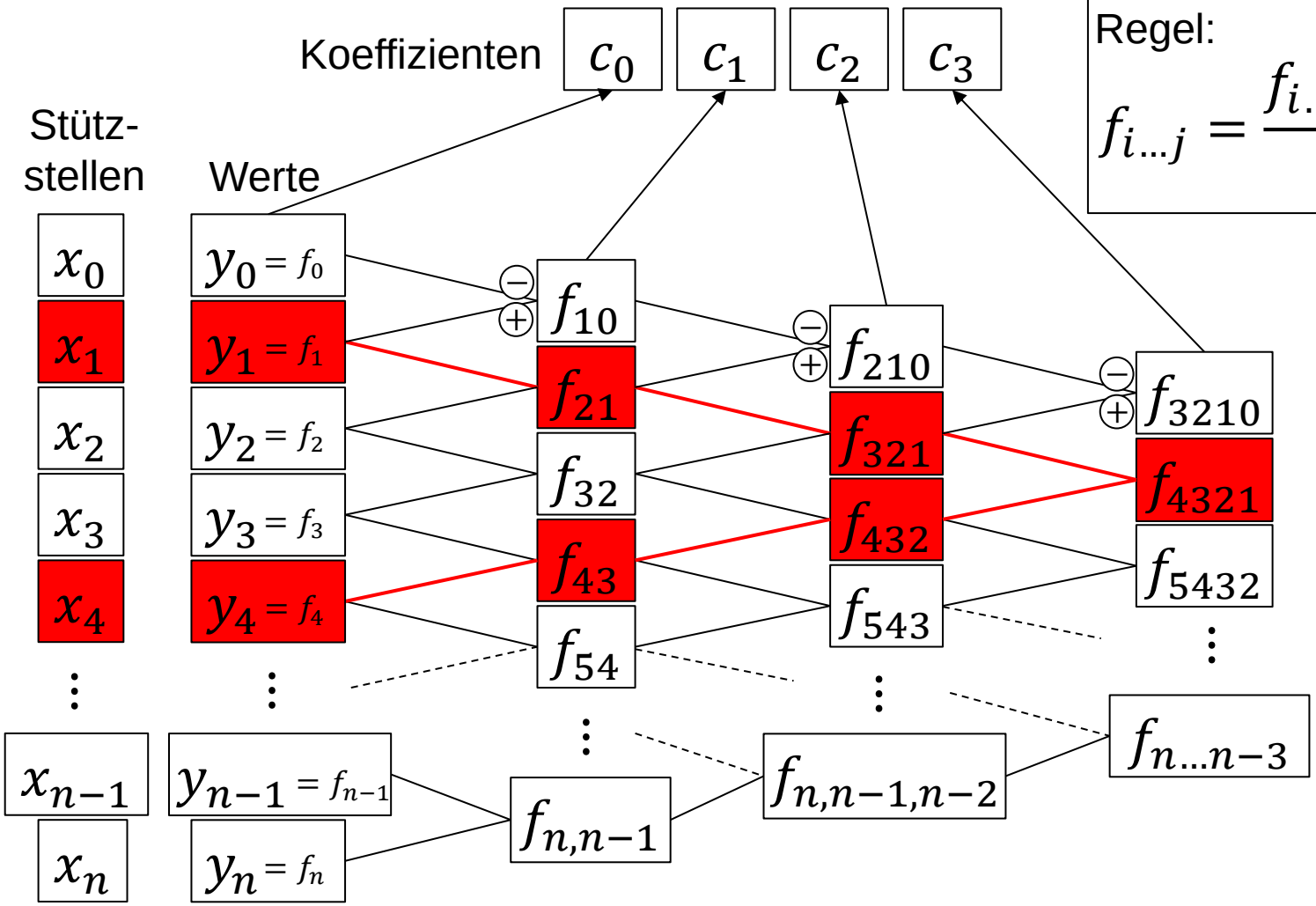
Newton-Schema (Steigungsschema)



Regel:

$$f_{i\ldots j} = \frac{f_{i\ldots j+1} - f_{i-1\ldots j}}{x_i - x_j}$$

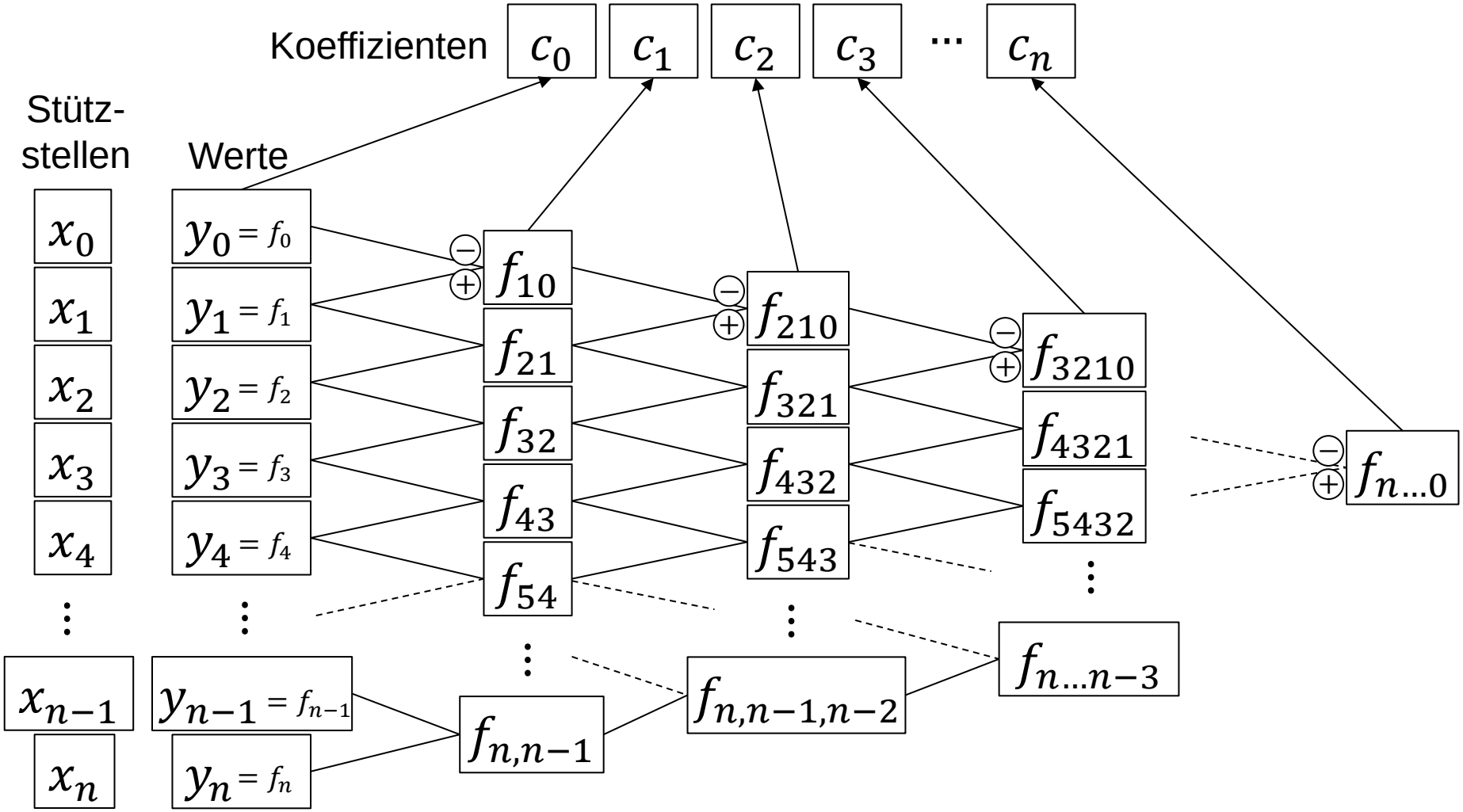
Newton-Schema (Steigungsschema)



Regel:

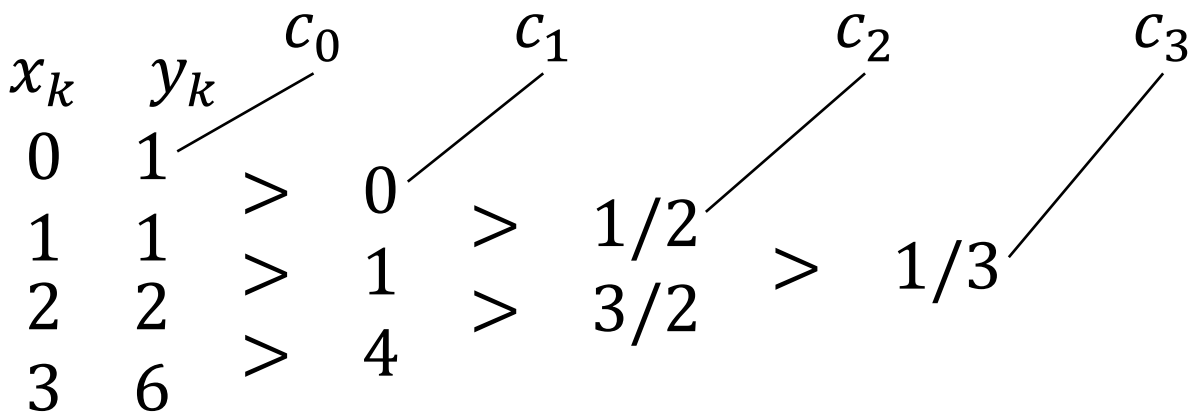
$$f_{i\ldots j} = \frac{f_{i\ldots j+1} - f_{i-1\ldots j}}{x_i - x_j}$$

Newton-Schema (Steigungsschema)



Beispiel (Teil 3): Newton-Form

- Bestimme p_3 für $x_k = k, y_k = k$!



- $p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$

Beispiel (Teil 3): Newton-Form

- Bestimme p_4 für $x_k = k, y_k = k!$

		c_0		c_1		c_2		c_3		c_4
x_k	y_k									
0	1									
		$>$		0						
1	1				$>$	$1/2$				
		$>$		1			$>$	$1/3$		
2	2				$>$	$3/2$			$>$	$3/8$
		$>$		4			$>$	$11/6$		
3	6				$>$	7				
		$>$		18						
4	24									

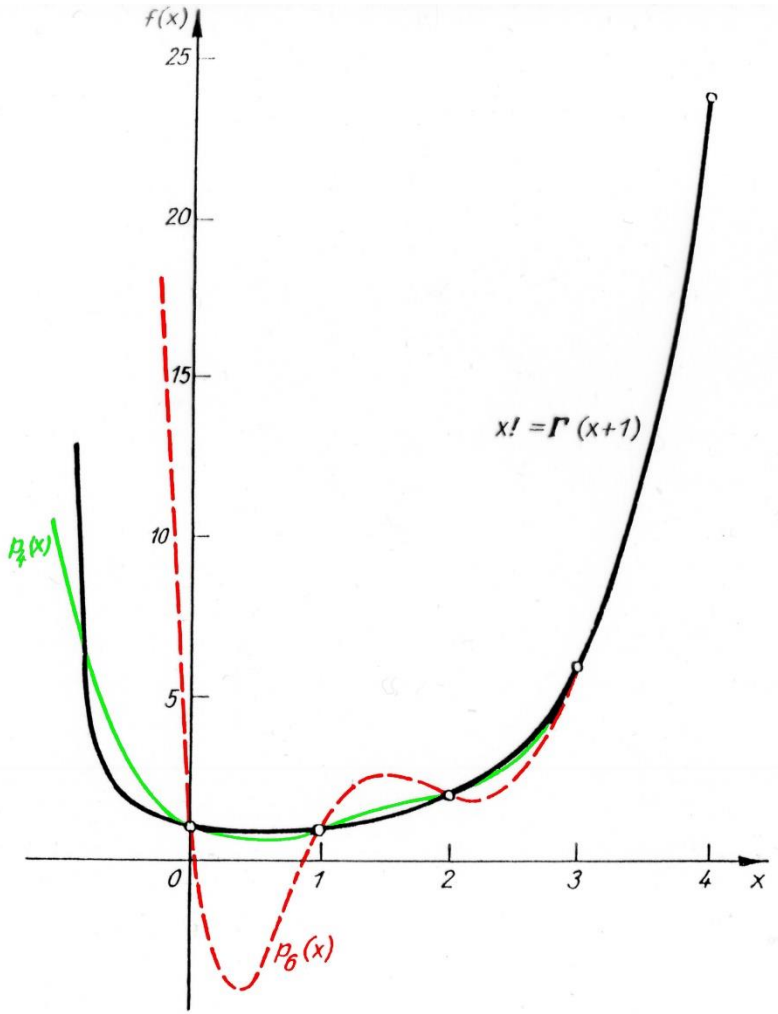
- $p_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$

$$+ \frac{3}{8}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Beispiel: Interpolation der Γ-Funktion

Beispiel (Teil 4):

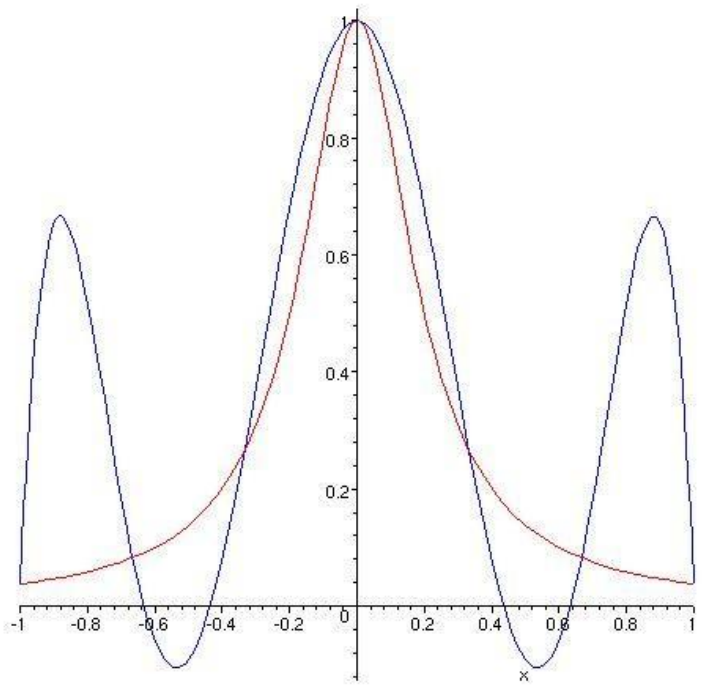
- **Beobachtung:**
  p_4 approximiert Γ über $[0,4]$ besser als p_6.



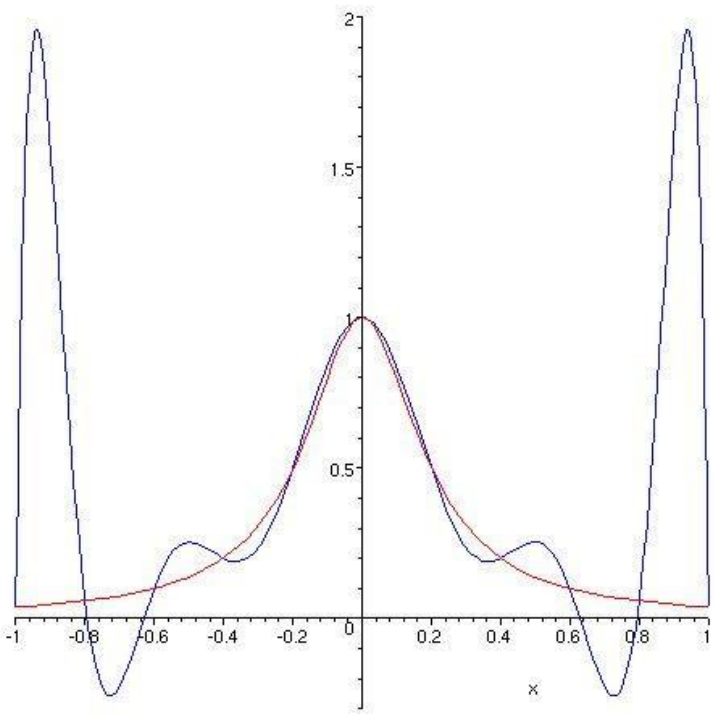
Beispiel: Runge-Funktion

Runge-Funktion: $f(x) = \frac{1}{1+25 \cdot x^2}, x \in [-5,5]$.

Interpolant vom Grad 6



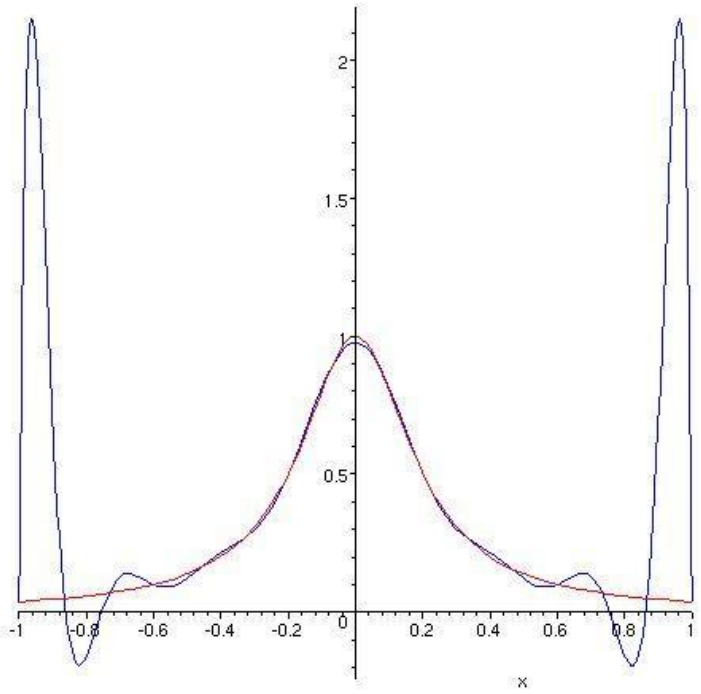
Interpolant vom Grad 8



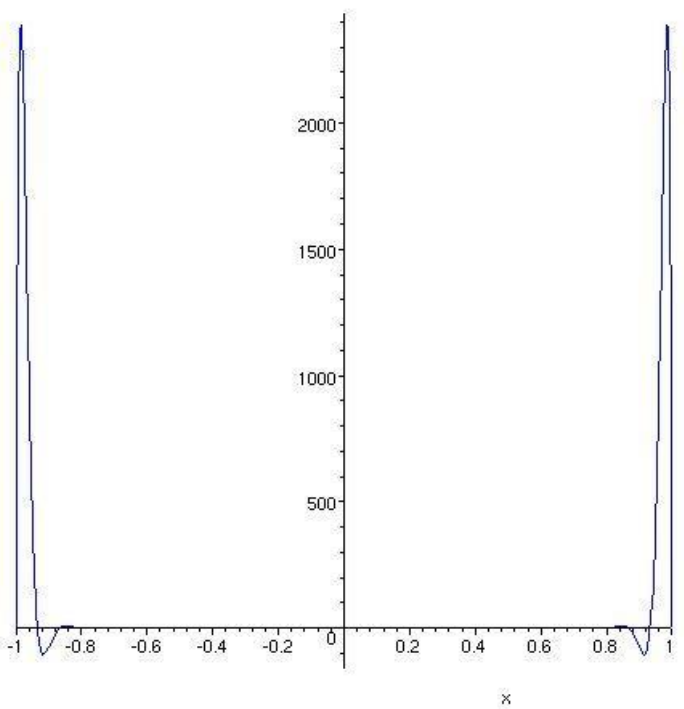
Beispiel: Runge-Funktion

Runge-Funktion: $f(x) = \frac{1}{1+25 \cdot x^2}, x \in [-5,5]$.

Interpolant vom Grad 15



Interpolant vom Grad 30



Sätze von Faber und Marcinkiewicz

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert für eine

Funktion $f \in C[a,b]$

und eine

Folge von Stützstellen $\left(x_i^{(n)}\right)_{i=0,\dots,n}^{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]$

mit

$$\left.\begin{aligned} a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b, \\ \lim_{n\to\infty} \max_i \left| x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} \right| = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(SB)}$$

die Folge von Interpolationspolynomen $(p_n)_n \subset \Pi_n$ mit

$$p_n\left(x_i^{(n)}\right) = f\left(x_i^{(n)}\right), i = 0, \dots, n, \quad \text{(IP)}$$

auf $[a,b]$ gegen f, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| = 0\,?$$

Sätze von Faber und Marcinkiewicz

Satz von Faber*: Für jede

Folge von Stützstellen $\left(x_i^{(n)}\right)_{i=0,\dots,n}^{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]$

mit (SB) gibt es eine

Funktion $f \in C[a,b]$,

so dass die Folge von Interpolationspolynomen $(p_n)_n$ mit (IP) auf $[a,b]$ **NICHT** (gleichmäßig) **GEGEN f KONVERGIERT**.



Georg Faber, 1877-1966

Satz von Marcinkiewicz*: Für jede

Funktion $f \in C[a,b]$

gibt es eine

Folge von Stützstellen $\left(x_i^{(n)}\right)_{i=0,\dots,n}^{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]$

mit (SB), so dass die Folge von Interpolationspolynomen $(p_n)_n$ mit (IP) auf $[a,b]$ (gleichmäßig) **GEGEN f KONVERGIERT**.

Aber: Konstruktion dieser $x_i^{(n)}$ **IST NICHT** bekannt.



Józef Marcinkiewicz, 1910-1940

Beispiel: Natürlicher Spline



Quelle: wikipedia

Beispiel: Kubische Splines

Beispiel:

Gesucht: kubische Spline-Funktion durch die Stützstellen

$$(0,0),\ (1,1/2),\ (2,2),\ (3,3/2)$$

Lösung: $n = 3, h = 1$

a) ▶ $a_0 = 0,\ a_1 = 1/2,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3/2.$

c) ▶ $c_0 = 0,\ c_3 = 0.$

b2) ▶ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

▶ $c_1 = 6/5,\ c_2 = -9/5.$

b1) ▶ $b_0 = 1/10,\ b_1 = 13/10, b_2 = 7/10.$

b3) ▶ $d_0 = 2/5, \quad d_1 = -1, \quad d_2 = 3/5.$

Beispiel: Kubische Splines

- $s_0(x) = \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{10}x, \qquad x \in [0,1]$

  $s_1(x) = -(x-1)^3 + \frac{6}{5}(x-1)^2 + \frac{13}{10}(x-1) + \frac{1}{2}, \; x \in [1,2]$

  $s_2(x) = \frac{3}{5}(x-2)^3 - \frac{9}{5}(x-2)^2 + \frac{7}{10}(x-2) + 2, \; x \in [2,3]$