Numerische Mathematik

§6 Approximation

Prof. Dr. Georg Umlauf

H T W G
Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Beispiel: Taylor-Polynom

Beispiel 1:

- Gesucht ist das Taylor-Polynom zweiten Grades von

$$f(x, y, z) = xy^2 \sin z$$

am Entwicklungspunkt $x^0 = (1,2,0)^t$.

- $D = \mathbb{R}^3$, $B(x^0, r)$ mit beliebig großem r.
- Verwende die Abkürzungen $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$ usw. folgt

$$\left[\left(x - x^0\right)^t \nabla\right] = (x-1)\partial_x + (y-2)\partial_y + z\partial_z$$

$$\left[\left(x - x^0\right)^t \nabla\right]^2 = (x-1)^2\partial_{xx} + (y-2)^2\partial_{yy} + z^2\partial_{zz} + 2(x-1)(y-2)\partial_{xy} + 2(x-1)z\partial_{xz} + 2(y-2)z\partial_{yz}.$$

Beispiel: Taylor-Polynom

Beispiel 1:

- Benötigte partielle Ableitungen:

Ableitung	Auswertung in $\boldsymbol{x^0 = (1, 2, 0)^t}$
$f(x, y, z) = xy^2 \sin z$	0
$f_x(x, y, z) = y^2 \sin z$	0
$f_y(x, y, z) = 2xy \sin z$	0
$f_z(x, y, z) = xy^2 \cos z$	4
$f_{xx}(x, y, z) = 0$	0
$f_{xy}(x, y, z) = 2y \sin z$	0
$f_{xz}(x, y, z) = y^2 \cos z$	4
$f_{yy}(x, y, z) = 2x \sin z$	0
$f_{yz}(x, y, z) = 2xy \cos z$	4
$f_{zz}(x, y, z) = -xy^2 \sin z$	0

Beispiel: Taylor-Polynom

Beispiel 1:

- $$T_{2,x^0}(x,y,z) = 0 + \frac{1}{1!}[(x-1)\cdot 0 + (y-2)\cdot 0 + z\cdot 4]$$
$$+ \frac{1}{2!}[(x-1)^2\cdot 0 + (y-2)^2\cdot 0 + z^2\cdot 0$$
$$+ 2(x-1)(y-2)\cdot 0 + 2(x-1)z\cdot 4$$
$$+ 2(y-2)z\cdot 4]$$
$$= 4z(x+y-2).$$

Beispiel: Taylor-Polynom

Beispiel 2:

- Gesucht ist das Taylor-Polynom zweiten Grades und das Restglied von

$$f(x,y) = e^{xy}$$

am Entwicklungspunkt (x_0, y_0).

- $D = \mathbb{R}^2$, $B(x^0, r)$ mit beliebig großem r.
- Benötigte partielle Ableitungen:

Ableitung		
$f_x = ye^{xy}$	$f_{yy} = x^2e^{xy}$	$f_{yyy} = x^3e^{xy}$
$f_y = xe^{xy}$	$f_{xy} = (1+xy)e^{xy}$	$f_{xxy} = (2y+xy^2)e^{xy}$
$f_{xx} = y^2e^{xy}$	$f_{xxx} = y^3e^{xy}$	$f_{xyy} = (2x+x^2y)e^{xy}$

Beispiel: Taylor-Polynom

Beispiel 2:

- Abkürzung: $\bar{x} = x_0 + t(x - x_0), \bar{y} = y_0 + t(y - y_0), t \in (0,1)$.

$$
\begin{aligned}
e^{xy} = e^{x_0 y_0}\{&[1 + y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0)] \\
&+ \frac{1}{2!}[y_0^2(x - x_0)^2 + x_0^2(y - y_0)^2 \\
&+ 2(1 + x_0 y_0)(x - x_0)(y - y_0)]\} \\
&+ \frac{1}{3!} e^{\bar{x}\bar{y}}[\bar{y}^3(x - x_0)^3 \\
&+ 3\left(2\bar{y} + \bar{x}\bar{y}^2\right)(x - x_0)^2(y - y_0) \\
&+ 3\left(2\bar{x} + \bar{x}^2\bar{y}\right)(x - x_0)(y - y_0)^2 \\
&+ \bar{x}^3(y - y_0)^3].
\end{aligned}
$$

Beispiel: Taylor-Polynom

Beispiel 3:

Gesucht: Taylor-Polynom von e^x auf $[0,1]$ vom Grad n in $x^0 = 0$.

Lösung: $f^{(k)}(x) = e^x$ ⇨ $f^{(k)}(0) = 1, k \in \mathbb{N}$.

- $T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$.
- **Restglied:** Für $f^{(n+1)}(u) = e^u$ auf $[0,1]$ gilt

$$1 \leq e^u \leq 3 \quad \text{und} \quad 0 \leq x^{n+1} \leq 1.$$

  - $\left|R_{n,0}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leq \frac{3}{(n+1)!}$.
  - Für $n = 10$ gilt also $\left|R_{10,0}\right| \leq \frac{3}{11!} = 7.5 \cdot 10^{-8} < 5 \cdot 10^{-7}$, d.h. T_{10} approximiert auf 6 Stellen genau.

Beispiel: Taylor-Polynom

- Verdopplung von $(x - x^0)$ bzw. x führ zu Vergrößerung von R_n um das 2^{n+1}–fache.
- e^x auf $[0,2]$: $1 \leq e^u \leq e^2 \leq 8$ und $0 \leq x^{n+1} \leq 2^{n+1}$
- $\left|R_{n,0}(x)\right| \leq 8\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
- $n = 10$: $\left|R_{10,0}\right| \leq 8\frac{2^{11}}{11!} = 0.00041$, d.h. T_{10} approximiert auf 3 Stellen genau.
- Nur in der Nähe des Entwicklungspunktes approximiert T_n gut.

Beispiel: Ausgleichspolynom

Beispiel 4: $n = 1$, Ausgleichsgerade $p_1(x) = a_0 + a_1 x$

$$\begin{aligned} N \cdot a_0 + \left(\sum x_k\right) \cdot a_1 &= \sum y_k \\ \left(\sum x_k\right) \cdot a_0 + \left(\sum x_k^2\right) \cdot a_1 &= \sum x_k y_k \end{aligned}$$

Beispiel 5: $n = 2$, Ausgleichsparabel $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{aligned} N \cdot a_0 + \left(\sum x_k\right) \cdot a_1 + \left(\sum x_k^2\right) \cdot a_2 &= \sum y_k \\ \left(\sum x_k\right) \cdot a_0 + \left(\sum x_k^2\right) \cdot a_1 + \left(\sum x_k^3\right) \cdot a_2 &= \sum x_k y_k \\ \left(\sum x_k^2\right) \cdot a_0 + \left(\sum x_k^3\right) \cdot a_1 + \left(\sum x_k^4\right) \cdot a_2 &= \sum x_k^2 y_k \end{aligned}$$

Beispiel: Ausgleichspolynom

Beispiel 6: $n = 3$, approximiere die Funktion $y = \sinh x$ mit einem kubischen Polynom an den Stellen

$$(0,0), (\pm 1, \pm \sinh 1), (\pm 2, \pm \sinh x).$$

- $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 2.$
- $$\begin{aligned} \sum x_i &= 0, & \sum x_i^2 &= 10, \\ \sum x_i^3 &= 0, & \sum x_i^4 &= 34, \\ \sum x_i^5 &= 0, & \sum x_i^6 &= 130, \\ \sum y_i &= 0, & \sum x_i\, y_i &= 16.8578, \\ \sum x_i^2 y_i &= 0, & \sum x_i^3 y_i &= 60.3802. \end{aligned}$$

Beispiel: Ausgleichspolynom

- $$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 34 \\ 10 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16.8578 \\ 0 \\ 60.3802 \end{pmatrix}$$

- $p_3(x) = 0.96242\, x + 0.21276\, x^3$.
- p_3 approximiert $\sinh x$ in $[-2,2]$ recht gut, aber außerhalb schlecht.

Beispiel: Ausgleichspolynom

